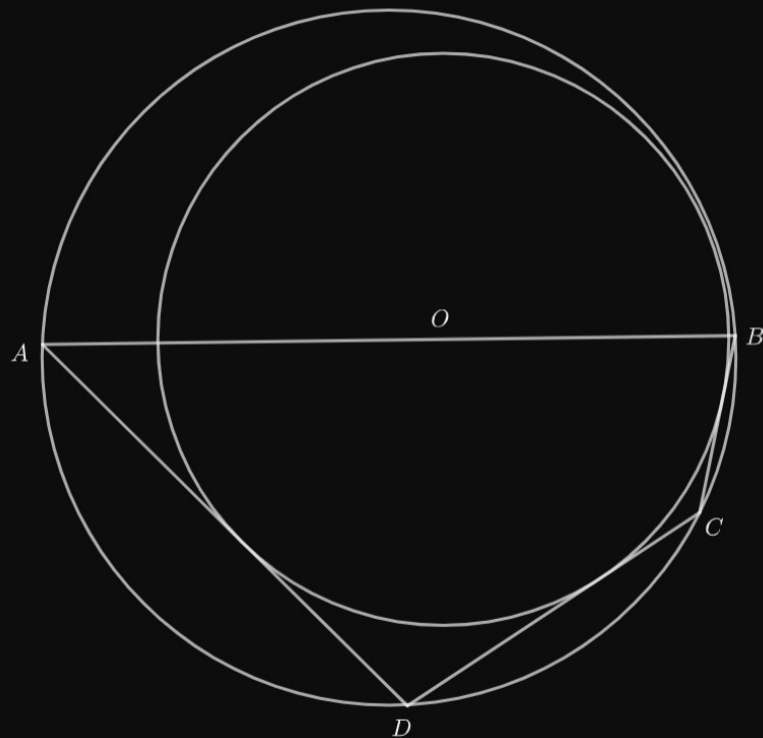
Doubt Yourself

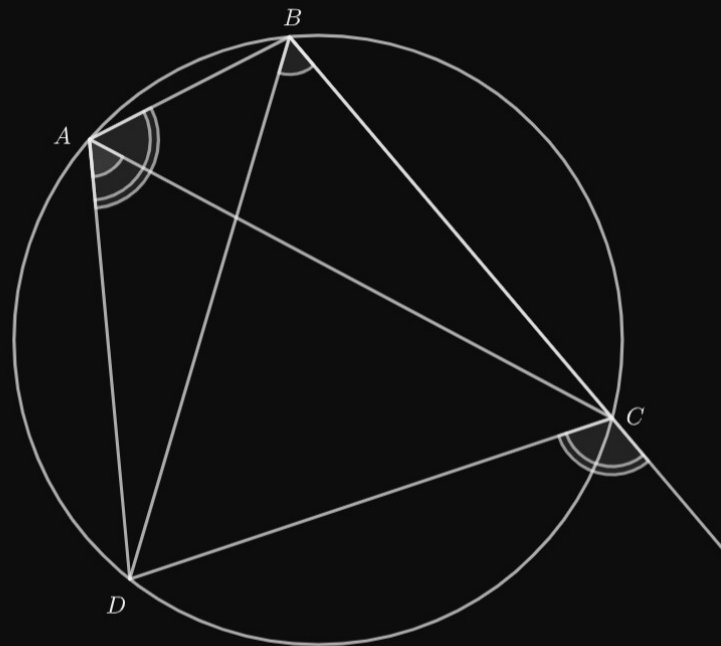
International Mathematical Olympiad (IMO)
1985 – Problema 1

André Pinheiro

Janeiro de 2023

Problema 1: Um círculo tem centro no lado $\overline{AB}$ de um quadrilátero cíclico $ABCD$. Os outros lados são tangentes ao círculo. Prove que $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$

O que é um quadrilátero cíclico?

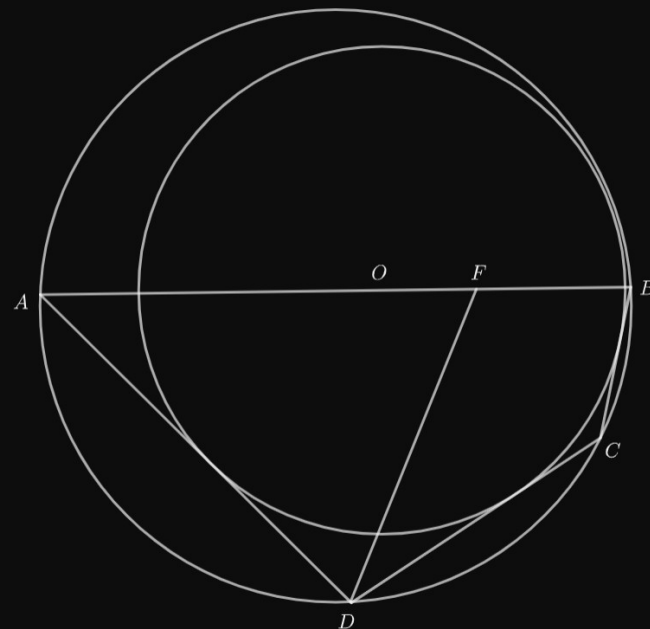
Um quadrilátero $ABCD$ é cíclico se este estiver inscrito numa circunferência. Este possui as seguintes propriedades:

- A soma dos ângulos internos oposto de um quadrilátero cíclico é 180º
- Pelo teorema do ângulo inscrito, $\angle DAC = \angle DBC$ e isso é análogo com os outros ângulos.

Solução

Vamos tentar transportar estas medidas para o segmento AB.

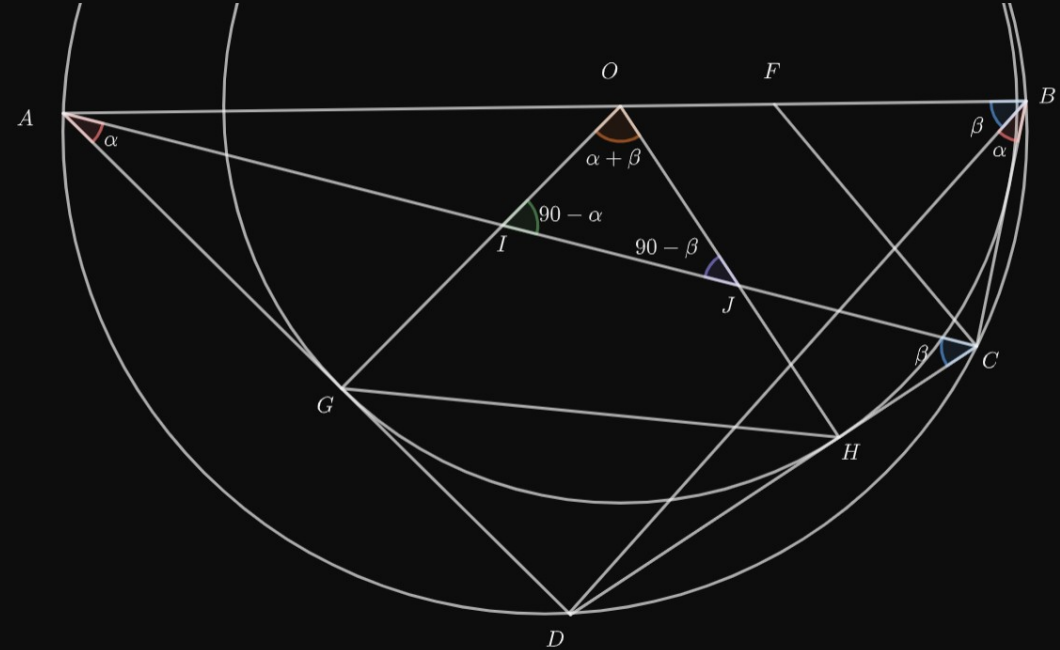
Solução

Vamos tentar transportar estas medidas para o segmento AB.

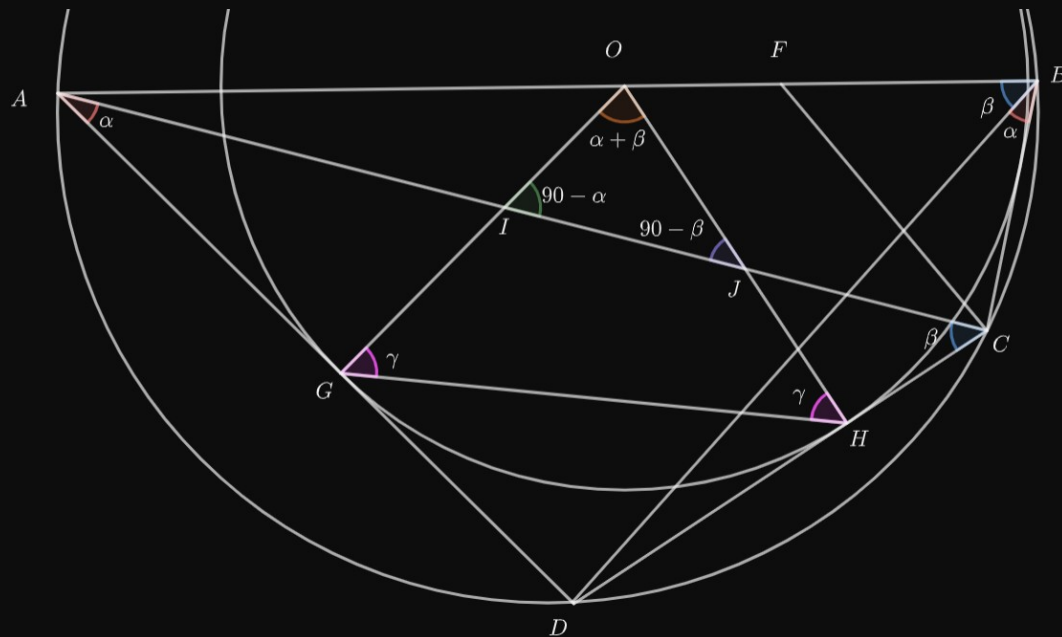
Seja F um ponto em AB tal que $AF = AD$. Se conseguirmos provar que $FB = CB$, resolvermos o problema. Para isso, temos que provar que $\angle CFB = \angle BCF$.

Solução

Vamos tentar transportar estas medidas para o segmento AB.

Seja F um ponto em AB tal que $AF = AD$. Se conseguirmos provar que $FB = CB$, resolvermos o problema. Para isso, temos que provar que $\angle CFB = \angle BCF$.

Seja G e H a projeção ortogonal de O em AD e CD, respetivamente e I o ponto de intersecção de GO com AC e J o ponto de intersecção de OH com AC. Seja também $\angle DBC = \alpha$ e $\angle ABC = \beta$. Como $ABCD$ é cíclico, $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$ e AGI é reto em G, logo $\angle OIJ = 90 - \alpha$. Analogamente para β, temos que $\angle OJI = 90 - \beta$. Portanto, $\angle IOJ = \angle FBC = \alpha + \beta$

Solução

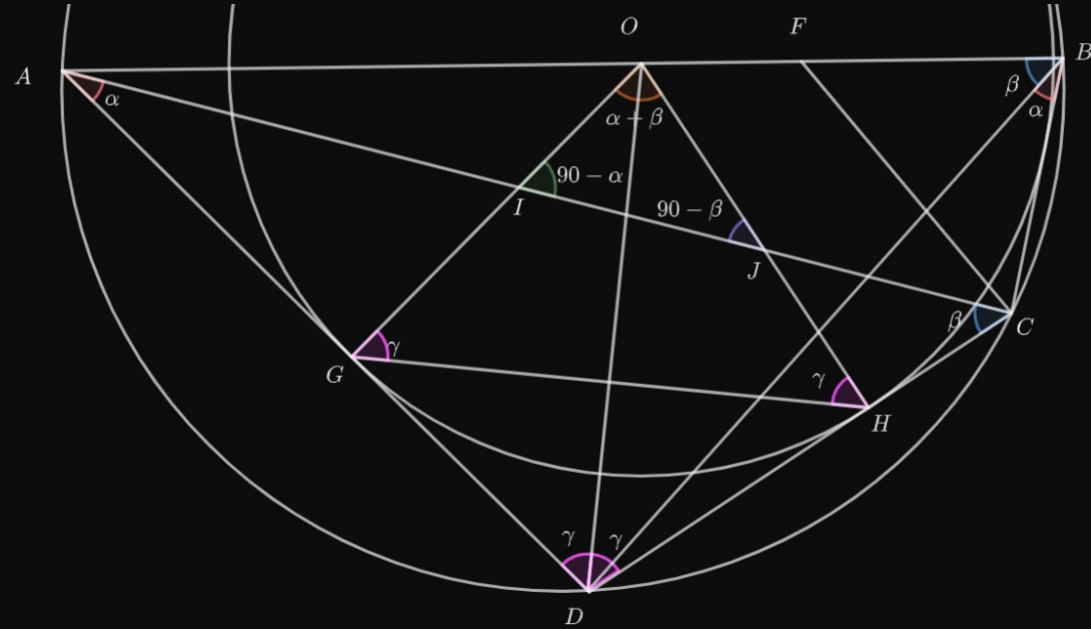
Como $GO = OH$, o triângulo GHO é isósceles

Seja $\angle OGH = \angle OHG = \gamma$. Se conseguirmos provar que $\angle CFB = \gamma$ ou que $\angle FCB = \gamma$, o problema está resolvido.

Solução

Como $GO = OH$, o triângulo GHO é isósceles

Seja $\angle OGH = \angle OHG = \gamma$. Se conseguirmos provar que $\angle CFB = \gamma$ ou que $\angle FCB = \gamma$, o problema está resolvido.

Como $\angle DGO = 180 - \angle OHD = 90$, o quadrilátero $GOHD$ é cíclico, portanto $\angle OGH = \angle OHG = \angle GDO = \angle HDO = \gamma$.

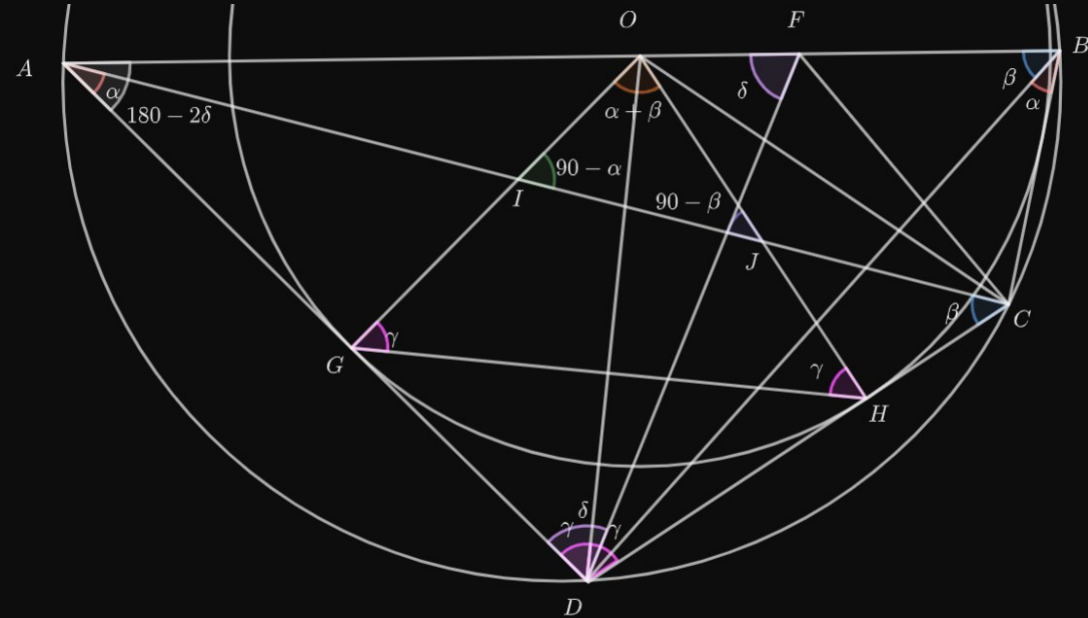
Se conseguirmos provar que $OFCD$ é cíclico, então $\angle CFB = \angle ODH = \gamma$ e resolvemos o problema.

Solução

Como $GO = OH$, o triângulo GHO é isósceles

Seja $\angle OGH = \angle OHG = \gamma$. Se conseguirmos provar que $\angle CFB = \gamma$ ou que $\angle FCB = \gamma$, o problema está resolvido.

Como $\angle DGO = 180 - \angle OHD = 90$, o quadrilátero $GOHD$ é cíclico, portanto $\angle OGH = \angle OHG = \angle GDO = \angle HDO = \gamma$.

Se conseguirmos provar que $OFCD$ é cíclico, então $\angle CFB = \angle ODH = \gamma$ e resolvemos o problema.

Seja $\angle AFD = \delta$. Como $AF = AD$, então $\angle ADF = \delta$ e $\angle DAF = 180 - 2\delta$. Como $ABCD$ é cíclico, temos que $\angle DCB = 2\delta$. Como DC e CB são tangentes ao círculo de centro O, então OC bisseta $\angle DCB$ e portanto, $\angle DCO = \delta$. Ora, como $\angle OFD = \angle DCO = \delta$, temos que $OFCD$ é cíclico.

Solução

Sendo assim, $\angle CFB = \angle ODH = \gamma$ e provamos então que $FB = BC$.

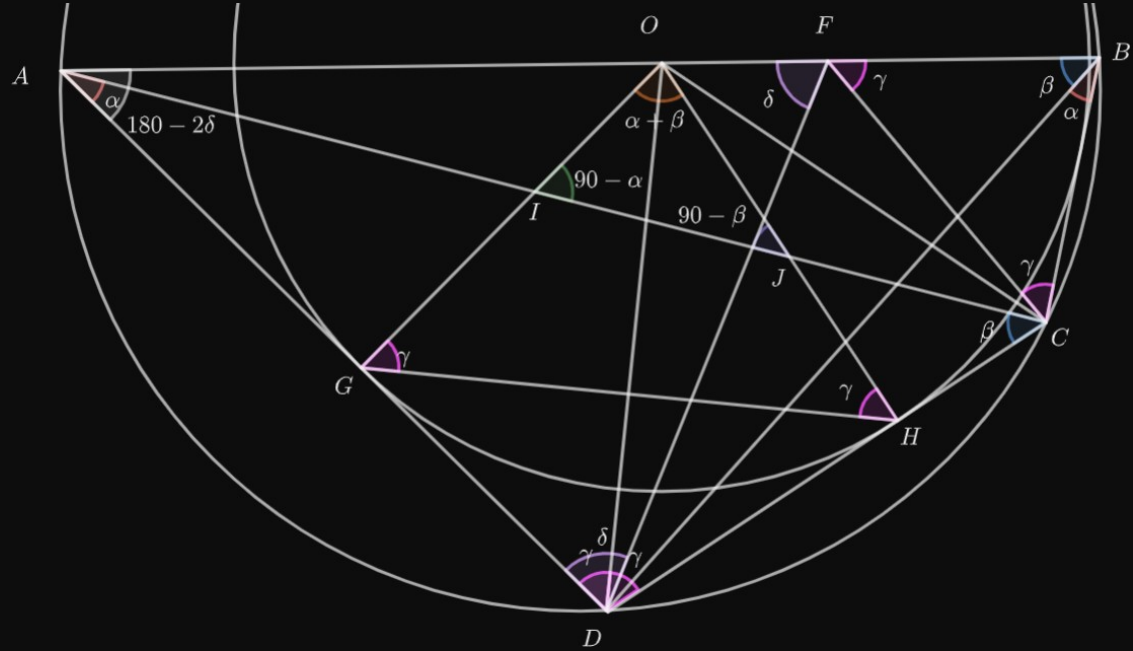
Portanto, temos $AF + FB = AB \leftrightarrow AD + BC = AB$, tal como queríamos mostrar. □

Solução

Diagrama no GeoGebra: https://www.geogebra.org/calculator/wjb7xspx